

采用相对位置量测的紧耦合式 多无人机协同定位算法

刘淑青, 高永新, 韩德强

(西安交通大学电子与信息学部, 710049, 西安)

摘要: 针对仅使用惯性测量单元(IMU)的自主定位导航存在严重误差累积的问题, 将IMU解算和置信传播(BP)算法进行紧耦合, 在扩展卡尔曼滤波器(EKF)的框架下, 使用无人机(UAV)间的相对位置量测直接更新大地坐标系下各无人机的位置状态, 提出了一种适用于大地坐标系多无人机定位与导航的紧耦合的分布式协同定位算法(EKF-BP)。首先, 实现了基于IMU量测和无人机间相对位置量测的集中式协同定位算法; 接着, 将BP算法扩展到大地理坐标系, 并与基于IMU的自主导航紧耦合, 完成卫星拒止环境中多无人机系统的协同定位与导航; 最后, 将所提出的方法与基于协方差交叉的协同定位进行比较。仿真结果表明, 分布式协同定位算法具有明显的计算效率优势, 与基于协方差交叉的分布式协同定位方法相比, 所提EKF-BP算法提高了多无人机系统在卫星拒止环境中的定位导航精度, 是协方差交叉方法提升量的10倍左右。所提的分布式EKF-BP算法能够显著地抑制仅依赖IMU数据所导致的定位导航精度随时间迅速变差的问题。

关键词: 集中式协同定位; 分布式协同定位; 置信传播; 协方差交叉

中图分类号: TP29; V249.3 **文献标志码:** A

DOI: 10.7652/xjtuxb202410016 **文章编号:** 0253-987X(2024)10-0178-10

Tightly Coupled Cooperative Localization Algorithm for Multiple Unmanned Aerial Vehicles Based on Relative Position Measurements

LIU Shuqing, GAO Yongxin, HAN Deqiang

(Faculty of Electronic and Information Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: To tackle the error-accumulation issue of autonomous localization and navigation utilizing inertial measurement unit (IMU), a tightly coupled approach that integrates IMU estimation and belief propagation (BP) algorithm within the framework of the extended Kalman filter (EKF) is proposed. The proposed EKF-BP method directly updates the position states of multiple unmanned aerial vehicles (UAV) in the geodetic coordinate system based on relative position measurements. Firstly, a centralized cooperative localization algorithm is implemented based on IMU measurements and relative position measurements among UAVs. Then, the BP algorithm is extended to the geodetic coordinate system and tightly coupled with IMU-based autonomous navigation to achieve cooperative localization and navigation of multiple UAV systems in satellite-denied environments. Finally, the proposed method is compared with the cooperative localization based on covariance intersection. The simulation results show that the

收稿日期: 2024-01-29。 作者简介: 刘淑青(1999—), 女, 硕士生; 高永新(通信作者), 男, 副教授。 基金项目:

国家自然科学基金资助项目(U22A2045)。

网络出版时间: 2024-05-17

网络出版地址: <https://link.cnki.net/urlid/61.1069.T.20240517.1145.005>

proposed distributed cooperative localization method has an obvious advantage in computing efficiency as the number of UAVs increases. In comparison to the distributed cooperative localization based on covariance intersection, EKF-BP achieves enhanced precision in localization and navigation in satellite-denied environments, which is about 10 times the improvement of the covariance intersection method. The proposed EKF-BP method effectively suppresses the rapid accuracy degradation of dead reckoning relying merely on IMU measurements.

Keywords: centralized cooperative localization; distributed cooperative localization; belief propagation; covariance intersection

精确的定位与导航对无人机的大多数应用至关重要^[1]。通常情况下,无人机可通过全球导航卫星系统^[2](global navigation satellite system, GNSS)或信标获取绝对位置。然而 GNSS 在卫星拒止环境中不可用^[3],基于信标的定位则需要预先布置,这一要求对于军事应用很难满足。基于惯性测量单元(inertial measurement unit, IMU)或里程计的自主定位导航不依赖外部信息,但由于误差累积效应,其导航定位精度会随时间迅速变差^[4]。因此,拒止环境下高精度、低成本的定位导航算法一直是该领域的研究热点。

对于工作在卫星拒止环境中的多无人机系统,研究利用无人机间的相对量测来降低误差累积效应,提高导航定位精度的问题称为协同定位(cooperative localization, CL)。协同定位能够很好地规避传统定位方法所需的高信号传输功率和高节点部署密度问题^[2]。现有的协同定位研究可以根据估计算法分为基于优化的方法、基于概率图的方法和基于数据融合的方法。基于优化的算法将协同定位集中建模为非线性最小二乘问题求解,通常会带来较大的通信负担^[5]。与之相比,基于概率图的方法^[6]将全局估计问题分解为多个局部估计函数的乘积,降低了整体估计的计算复杂度。其中,基于因子图的置信传播(belief propagation, BP)算法^[7]由于其天然的分布式架构、高精度估计和低成本计算而备受关注,但其涉及概率密度函数(probability density function, PDF)的积分、乘积运算以及传输,在实际应用中较为困难。而高斯 BP^[8]、SPBP^[9]和非参数 BP^[10],通过将 Kalman 滤波器、无迹滤波器和粒子滤波器推广到更一般的因子结构,提供了较低复杂度的 BP 近似方案^[9]。针对非线性量测问题,文献[11]将后验线性化滤波器^[12]与高斯 BP 算法结合,提出了后验线性 BP 算法,提高线性化的精度,从而提高 CL 性能。粒子滤波由于不受系统模型的线性和高斯假设约束,在非高斯系统的协同定

位问题上得到了广泛的研究和应用^[10]。考虑到大量粒子带来的通信和计算负担,文献[13]提出了 BP-MF 算法,该方法兼具 BP 的高精度定位和平均场近似的低通信成本优势。在标准 BP 中,节点向任一邻居发送的消息均需单独计算,文献[14]提出的 SPAWN 算法使用置信度代替传出消息,使节点在每次迭代中对所有邻居的传出消息都相同,因此可以使用广播代替点对点通信,极大地降低了通信需求。CIBP 算法^[15]利用网络中的连通性信息评价节点位置估计的可靠性,去除可靠性低的节点信息,降低了 SPAWN 算法的计算负担并提高了定位性能。对于存在环路的复杂网络,BP 算法可能无法收敛到全局最优^[16]。在分布式协同定位中,由共同的过程噪声和先验导致的潜在相关性很难获取^[17],基于协方差交叉(covariance intersection, CI)的方法能够在节点间信息相关性未知的情况下融合多个估计,同时保持估计的一致性^[18]。考虑到节点间通信受阻的可能性,文献[19]令各节点跟踪整个系统的状态并使用自身量测更新,基于邻居信息的 CI 融合只在通信可用时独立进行,从而降低了通信故障对定位性能的影响。文献[20]利用 CI、逆 CI 提出了一种同时定位与跟踪的分布式算法,可有效降低信息传输和处理的成本,并保持了估计的鲁棒性。但是,基于 CI 的方法需要额外的计算时间来优化均值和协方差的组合权重^[21]。上述已有的协同定位研究均针对固定的笛卡尔坐标系展开,并且大多仅限于固定坐标系的小场景,这样过度的简化使其无法直接应用于多无人机协同定位与导航问题。文献[22]提出的 EKF-CI 算法虽然能直接更新大地坐标系的位置,但受 CI 算法固有局限性的影响,无法获得高精度的定位结果。

目前,对于位置定义在大地坐标系,速度和姿态定义在局部东北天坐标系的协同定位与导航的相关研究相对较少,尚未发现切实有效的解决办法,潜在的间接求解的方式也无法达到直接更新的效率和精

度。本文将 BP 算法扩展到大地坐标系,并与基于 IMU 的自主导航紧耦合完成卫星拒止环境中多无人机的协同定位与导航。通过建立观测方程,在扩展卡尔曼滤波器(extended Kalman filter, EKF)的框架下,使用相对位置量测直接更新大地坐标系下无人机的位置状态,实现了 EKF-BP 的分布式协同定位。通过仿真实验对比 EKF-BP、EKF-CI 的定位精度,验证了 EKF-BP 的计算效率和估计性能。

1 IMU 演化与相对量测模型

多无人机协同定位如图 1 所示,由虚线连接的无人机互为邻居,邻居之间可以进行相对位置量测,通过在邻居间交换信息来提高整个多无人机系统的定位导航精度,每架无人机均配置 IMU。

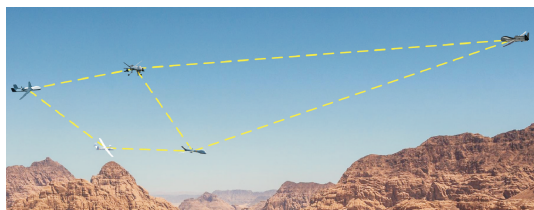


图 1 多无人机协同定位

Fig. 1 Multi-UAV cooperative localization

1.1 IMU 状态传播模型

各无人机的 IMU 状态向量定义如下

$$\mathbf{x} = [(\mathbf{r}^e)^T \quad (\mathbf{v}^l)^T \quad (\mathbf{E}^l)^T \quad (\mathbf{b}_g)^T \quad (\mathbf{b}_a)^T]^T \quad (1)$$

式中: $\mathbf{r}^e = [\varphi \quad \lambda \quad h]^T$ 为大地坐标系的经纬高; $\mathbf{v}^l = [v_E \quad v_N \quad v_U]^T$ 为东北天(ENU)坐标系中的速度; $\mathbf{E}^l$ 为俯仰、横滚、偏航 Euler 角; $\mathbf{b}_g$ 、 $\mathbf{b}_a$ 分别为陀螺仪偏置和加速度计漂移。

IMU 状态演化模型为

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}}^e \\ \dot{\mathbf{v}}^l \\ \dot{\mathbf{q}}_b^l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{v}^l \\ \mathbf{R}_b^l \mathbf{f}^b - (2\boldsymbol{\Omega}_{ie}^l + \boldsymbol{\Omega}_{el}^l) \mathbf{v}^l + \mathbf{g}^l \\ \frac{1}{2} \mathbf{q}_b^l \otimes \boldsymbol{\omega}_{ib}^b \end{bmatrix} \quad (2)$$

式中: $\mathbf{D}^{-1}$ 参考文献[23]; $\mathbf{f}^b$ 、 $\mathbf{g}^l$ 分别为比力和 ENU 系的重力加速度。旋转矩阵 $\mathbf{R}_b^l$ 和四元数 $\mathbf{q}_b^l$ 描述载体坐标系到 ENU 坐标系的转换,均由姿态角变换得到;反对称矩阵 $\boldsymbol{\Omega}_{ie}^l$ 、 $\boldsymbol{\Omega}_{el}^l$ 由角速度向量 $\boldsymbol{\omega}_{ie}^l$ 、 $\boldsymbol{\omega}_{el}^l$ 变换得到。为了方便计算,姿态的解算由四元数方程描述, $\otimes$ 表示四元数和向量的乘积。

IMU 量测模型为

$$\boldsymbol{\omega}_m = \boldsymbol{\omega}_{ib}^b + \mathbf{b}_g + \mathbf{n}_g \quad (3)$$

$$\mathbf{f}_m = \mathbf{f}^b + \mathbf{b}_a + \mathbf{n}_a \quad (4)$$

陀螺仪偏置 $\mathbf{b}_g$ 和加速度计漂移 $\mathbf{b}_a$ 为两个随机游走过程,有如下演化形式

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{b}}_g \\ \dot{\mathbf{b}}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_{wg} \\ \mathbf{n}_{wa} \end{bmatrix} \quad (5)$$

设 $\mathbf{n}_{wg}$ 、 $\mathbf{n}_{wa}$ 、 $\mathbf{n}_g$ 、 $\mathbf{n}_a$ 都为零均值的白噪声,那么比力 $\mathbf{f}^b$ 和角速度 $\boldsymbol{\omega}_{ib}^b$ 可以由下式估计得到,即

$$\hat{\mathbf{f}}^b = \mathbf{f}_m - \dot{\mathbf{b}}_a \quad (6)$$

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b = \boldsymbol{\omega}_m - \dot{\mathbf{b}}_g \quad (7)$$

获得比力 $\mathbf{f}^b$ 和角速度 $\boldsymbol{\omega}_{ib}^b$ 的估计后,可以通过对式(2)的数值积分得到仅基于 IMU 数据的位姿估计,此过程即航位推算(DR)。为了使用相对量测对 IMU 的状态估计进一步更新,需要知道 IMU 状态估计所对应的均方根误差(MSE),可通过误差状态模型来获得。

1.2 误差状态传播模型

IMU 误差状态向量定义为

$$\tilde{\mathbf{x}} = [(\tilde{\mathbf{r}}^e)^T \quad (\tilde{\mathbf{v}}^l)^T \quad (\tilde{\mathbf{E}}^l)^T \quad (\tilde{\mathbf{b}}_g)^T \quad (\tilde{\mathbf{b}}_a)^T]^T \quad (8)$$

IMU 的位置、速度和偏差的误差定义为估计和真值的差,姿态的误差定义则需要在旋转矩阵的基础上给出。若有旋转矩阵的估计值 $\hat{\mathbf{R}}_b^l$ 、真值 $\mathbf{R}_b^l$,姿态误差可由误差旋转矩阵 $\tilde{\mathbf{R}}_b^l$ 描述,三者的关系为

$$\mathbf{R}_b^l = \tilde{\mathbf{R}}_b^l \hat{\mathbf{R}}_b^l \quad (9)$$

根据 Euler 角与旋转矩阵的转换关系,可得到对应的姿态误差 $\tilde{\mathbf{E}}^l$ 。

IMU 误差状态的线性化连续时间模型为

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{F}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{G}\mathbf{n} \quad (10)$$

式中 $\mathbf{n} = [\mathbf{n}_g^T \quad \mathbf{n}_{wg}^T \quad \mathbf{n}_a^T \quad \mathbf{n}_{wa}^T]^T$ 表示系统噪声,对应的协方差矩阵为 $\mathbf{Q}$,矩阵 $\mathbf{F}$ 、 $\mathbf{G}$ 分别为

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{D}^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{F}^l & \mathbf{0} & -\mathbf{R}_b^l \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}_{32} & \mathbf{0} & -\mathbf{R}_b^l & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R}_b^l & \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_b^l & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \quad (12)$$

式中: $\mathbf{0}$ 为具有合适维度的零矩阵; $\mathbf{I}_3$ 为 3×3 的单

位矩阵; $\mathbf{F}^1$ 为 ENU 坐标系中加速度计量测的反对称矩阵; $\mathbf{F}_{32}$ 的定义参考文献[23]。

对连续时间系统离散化,可以得到误差传播模型的离散系统,以便于得到误差协方差矩阵的传播方程,即

$$\tilde{\mathbf{x}}(t_k) = \Phi(t_k, t_{k-1})\tilde{\mathbf{x}}(t_{k-1}) + \mathbf{G}(t_{k-1})\mathbf{n} \quad (13)$$

$$\Phi(t_k, t_{k-1}) = e^{\int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{F}(\tau) d\tau} \quad (14)$$

则误差的协方差矩阵(即状态估计对应的 MSE 矩阵)可由下式计算

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \Phi(t_k, t_{k-1})\mathbf{P}_{k-1|k-1}\Phi^T(t_k, t_{k-1}) + \mathbf{Q}_d \quad (15)$$

$$\mathbf{Q}_d = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Phi(t_k, \tau)\mathbf{G}(\tau)\mathbf{Q}(\tau)\mathbf{G}^T(\tau)\Phi^T(t_k, \tau)d\tau \quad (16)$$

1.3 相对量测模型及其线性化

将 N 架无人机的集合表示为 $\mathcal{A}$ 。如果在 t_k 时刻,无人机 i 能够获得对无人机 j 的相对量测($i, j \in \mathcal{A}$),则称无人机 j 为无人机 i 的邻居,记作 $j \in \mathcal{N}_i^k$ 。无人机 i 获得的相对量测 $\mathbf{z}_k^{i,j}$ (区分 $\mathbf{z}_k^{i,j}$ 和 $\mathbf{z}_k^{j,i}$)被建模为地心地固(ECEF)笛卡尔坐标系下节点间的相对位置,即

$$\mathbf{z}_k^{i,j} = \mathbf{c}(\mathbf{x}_k^j) - \mathbf{c}(\mathbf{x}_k^i) + \mathbf{v}_k^{i,j}, \quad i \in \mathcal{A}, j \in \mathcal{N}_i^k \quad (17)$$

式中: $\mathbf{x}_k^l$ ($l=i, j$) 为无人机 l 在 t_k 时刻的状态; $\mathbf{c}(\mathbf{x}_k^l)$ 由无人机位置 $\mathbf{r}^e$ 和地球的第一偏心率 e 计算,表示大地坐标系到笛卡尔坐标系的转换,即

$$\mathbf{c}(\mathbf{x}_k^l) = \begin{bmatrix} x^{ce} \\ y^{ce} \\ z^{ce} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (R_N + h) \cos \varphi \cos \lambda \\ (R_N + h) \cos \varphi \sin \lambda \\ \{R_N(1 - e^2) + h\} \sin \varphi \end{bmatrix} \quad (18)$$

关于 $\mathbf{x}_k^l$ 的雅可比矩阵记作 $\mathbf{H}_k^{l, \text{pos}}$; $\mathbf{v}_k^{i,j}$ 表示量测噪声,是均值为零、协方差为 $\mathbf{R}_k^{i,j}$ 的高斯白噪声,且假设所有量测噪声、过程噪声和初始状态相互独立。将量测函数在 t_k 时刻的状态预测 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^l$ ($l=i, j$) 处泰勒展开,可得如下的线性量测模型

$$\mathbf{z}_k^{i,j} = \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}^{i,j} + \mathbf{H}_k^i(\mathbf{x}_k^j - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^j) + \mathbf{H}_k^j(\mathbf{x}_k^i - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^i) + \mathbf{O}(\mathbf{x}) \quad (19)$$

式中: $\hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}^{i,j}$ 为量测的预测;

$$\mathbf{H}_k^i = [-\mathbf{H}_k^{i, \text{pos}} \quad \mathbf{0}]; \mathbf{H}_k^j = [\mathbf{H}_k^{j, \text{pos}} \quad \mathbf{0}] \quad (20)$$

2 集中式协同定位

集中式协同定位仅是一个状态和量测都扩维的

滤波问题。如果忽略滤波方法上的近似,集中式协同定位由于使用所有原始量测并充分利用状态间的相关性,因而具有最佳的估计性能。换言之,集中式协同定位提供了所有协同定位算法的精度上限,因此通常作为评估分布式算法性能的基准。因此,本文描述集中式协同定位问题,并实现大地坐标系下基于相对位置量测的集中式协同定位算法,用于评估本文所提出的分布式算法。

集中式协同定位可描述为在每个 t_k 时刻使用测量 $\mathbf{z}_k^{i,j}$ ($i \in \mathcal{A}, j \in \mathcal{N}_i^k$) 确定所有节点的后验分布的问题,即

$$f(\mathbf{X}_k | \mathbf{Z}_{1:k}) \propto f(\mathbf{Z}_k | \mathbf{X}_k)f(\mathbf{X}_k | \mathbf{Z}_{1:k-1}) \quad (21)$$

$$f(\mathbf{X}_k | \mathbf{Z}_{1:k-1}) = \int f(\mathbf{X}_k | \mathbf{X}_{k-1})f(\mathbf{X}_{k-1} | \mathbf{Z}_{1:k-1})d\mathbf{X}_{k-1} \quad (22)$$

式中: $\mathbf{X}_k$ 为 t_k 时刻的所有节点状态; $\mathbf{Z}_{1:k}$ 为直到 t_k 时刻获得的所有可用测量,关系式如下

$$\mathbf{X}_k \triangleq [(\mathbf{x}_k^1)^T, \dots, (\mathbf{x}_k^N)^T]^T \quad (23)$$

$$\mathbf{Z}_{1:k} \triangleq [(\mathbf{Z}_1)^T, \dots, (\mathbf{Z}_k)^T]^T \quad (24)$$

$$\mathbf{Z}_k \triangleq [(\mathbf{Z}_k^1)^T, \dots, (\mathbf{Z}_k^N)^T]^T \quad (25)$$

$$\mathbf{Z}_k^i \triangleq [\mathbf{z}_k^{i,j_1}, \dots, \mathbf{z}_k^{i,j_n}]^T, j_n \in \mathcal{N}_i^k \quad (26)$$

设各无人机先验状态独立并且进行无记忆的独立运动。注意到式(21)对应于贝叶斯滤波器的更新步骤,而式(22)则对应于预测步骤,下面讨论无人机集中式协同定位的具体实现。

各无人机的状态通过 IMU 模型进行一步演化,将演化后未被相对量测更新的估计记为 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^i$ ($i \in \mathcal{A}$),即一步预测,类似式(23)将所有节点的状态预测进行向量堆叠得到 $\hat{\mathbf{X}}_{k|k-1}^s$,其 MSE 矩阵记作 $\mathbf{P}_{k|k-1}^s$,传播模型为

$$\mathbf{P}_{k|k-1}^s = \Phi^s \mathbf{P}_{k-1|k-1}^s (\Phi^s)^T + \mathbf{Q}_d^s \quad (27)$$

式中: Φ^s 、 $\mathbf{Q}_d^s$ 分别为以 $\Phi^i(t_k, t_{k-1})$ 、 $\mathbf{Q}_d^i$ 作为对角线的矩阵,上标 i 表示第 i 架无人机,且 $i \in \mathcal{A}$ 。

类似式(25)、(26),将 t_k 时刻无人机间的所有相对位置量测和基于状态预测得到的量测预测分别进行向量堆叠。使用堆叠量测 $\mathbf{Z}_k^s$ 基于 EKF 中的更新步骤计算 $\tilde{\mathbf{X}}_k^s$ 来校正状态估计。位置和速度的更新结果为 $\hat{\mathbf{X}}_{k|k-1}^s$ 、 $\tilde{\mathbf{X}}_k^s$ 的差,姿态更新则需要引入旋转矩阵计算,即

$$\tilde{\mathbf{X}}_k^s = \mathbf{K}_k(\hat{\mathbf{Z}}_k^s - \mathbf{Z}_k^s) \quad (28)$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1}^s (\mathbf{H}_k^s)^T (\mathbf{H}_k^s \mathbf{P}_{k|k-1}^s (\mathbf{H}_k^s)^T + \mathbf{R}_k^s)^{-1} \quad (29)$$

$$\mathbf{H}_k^s = [\{(\mathbf{H}_k^{i,j})^T\}_{i \in \mathcal{A}, j \in \mathcal{N}_i^k}]^T \quad (30)$$

$$\mathbf{H}_k^{i,j} = [\mathbf{0} \quad \dots \quad \mathbf{H}_k^i \quad \dots \quad \mathbf{H}_k^j \quad \dots \quad \mathbf{0}] \quad (31)$$

式中: $\mathbf{R}_k^s$ 为以 $\mathbf{R}_k^{i,j}$ 作为对角线构造的矩阵; $\mathbf{K}_k$ 为滤波增益矩阵; 矩阵 $\mathbf{H}_k^i$ 和 $\mathbf{H}_k^j$ 由式(20)得到。状态估计对应的 MSE 矩阵更新如下

$$\mathbf{P}_{k|k}^s = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k^s) \mathbf{P}_{k|k-1}^s (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k^s)^T + \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k^s (\mathbf{K}_k)^T \quad (32)$$

集中式协同定位假设存在融合中心, 且所有数据均需传送到融合中心^[24], 当节点数较多且通信资源受限时很难实现。

3 基于 BP 的分布式协同定位

考虑到集中式算法的局限性, 结合 IMU 状态演化和节点间相对位置量测, 本节给出无人机分布式协同定位的因子图, 并完成 IMU 演化与 BP 紧耦合的协同定位。

3.1 BP 算法

基于 $\mathbf{Z}_{1:k}$ 进行贝叶斯推理的目标是获得每个状态 $\mathbf{x}_k^i$ 的边缘后验 PDF $f(\mathbf{x}_k^i | \mathbf{Z}_{1:k})$ 。因子图能够将联合概率密度函数因式分解并用图形化的模型描述^[25], 将复杂的全局运算分解为简单的局部运算, 计算效率高, 且方便增减因子节点, 在协同定位与导航中得到广泛运用, 因此在因子图中迭代执行 BP 来近似边缘后验 PDF。基于独立性假设, 联合 PDF $f(\mathbf{X}_{0:k} | \mathbf{Z}_{1:k})$ 可以如下的因式分解, 其中 $\mathbf{X}_{0:k}$ 表示直到 t_k 时刻的所有节点状态, 即

$$f(\mathbf{X}_{0:k} | \mathbf{Z}_{1:k}) \propto \prod_{i \in \mathcal{A}} f(\mathbf{x}_0^i) \prod_{t=1}^k \prod_{i_1 \in \mathcal{A}} \{f(\mathbf{x}_{t-1}^{i_1} | \mathbf{x}_{t-1}^{i_1}) f(\mathbf{z}_{t-1}^{i_1} | \mathbf{x}_{t-1}^{i_1}, \mathbf{x}_{t-1}^{i_1}) \cdot \prod_{j \in \mathcal{N}_k^{i_1}} f(\mathbf{z}_{t-1}^{i_1,j} | \mathbf{x}_{t-1}^{i_1}, \mathbf{x}_{t-1}^j)\} \quad (33)$$

式中: $\mathbf{X}_{0:k} \triangleq [(\mathbf{X}_0)^T \cdots (\mathbf{X}_k)^T]$ 。将式(33)映射到如图 2 所示的因子图中。因子图是一种表示因式分解结构的二部图, 包含两种类型的节点, 其中, 每个状态变量节点 $\mathbf{x}_k^i$ 由圆形表示, 每个因子节点 f_k^i 由方形表示。图 2 中 $f_k^i = f(\mathbf{z}_k^i | \mathbf{x}_k^i, \mathbf{x}_{k-1}^i) f(\mathbf{x}_k^i | \mathbf{x}_{k-1}^i)$, $f_k^{i,j} = f(\mathbf{z}_k^{i,j}, \mathbf{z}_k^{j,i} | \mathbf{x}_k^i, \mathbf{x}_k^j)$ 。当且仅当 $\mathbf{x}_k^i$ 是 f_k^i 的一个参数时, 因子图中对应的因子节点和变量节点用边连接。在因子图中执行 BP 算法, 沿着因子图的边传播消息, 并计算各节点的传入消息、传出消息和置信度, 变量节点 $\mathbf{x}$ 的置信度即为其边缘概率密度, 记作 $b(\mathbf{x})$ 。

节点接收到的消息将沿着连接的边发送给除了传入方向外的所有方向。当整个因子图中的消息传递完成后, 变量节点对应的置信度等于所有传入消息的乘积。

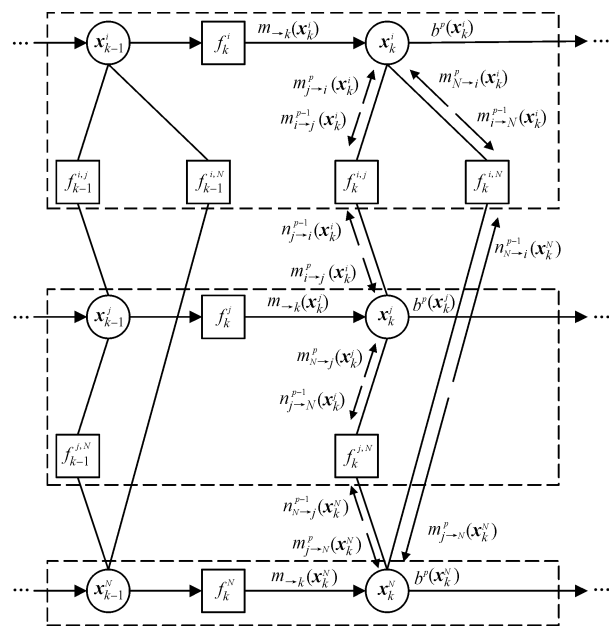


图 2 $f(\mathbf{X}_{0:k} | \mathbf{Z}_{1:k})$ 的因子图

Fig. 2 Factor graph of $f(\mathbf{X}_{0:k} | \mathbf{Z}_{1:k})$

图 2 中, $\mathbf{x}_k^i$ 在第 p 次迭代时的置信度为

$$b^p(\mathbf{x}_k^i) \propto m_{-k}(\mathbf{x}_k^i) \prod_{j \in \mathcal{N}_k^i} m_{j \rightarrow i}^p(\mathbf{x}_k^i), i \in \mathcal{A} \quad (34)$$

$$m_{-k}(\mathbf{x}_k^i) \propto$$

$$\int f(\mathbf{z}_k^i | \mathbf{x}_k^i, \mathbf{x}_{k-1}^i) f(\mathbf{x}_k^i | \mathbf{x}_{k-1}^i) b^p(\mathbf{x}_{k-1}^i) d\mathbf{x}_{k-1}^i \quad (35)$$

式中: $m_{-k}(\mathbf{x}_k^i)$ 为从变量节点 $\mathbf{x}_{k-1}^i$ 传递到 $\mathbf{x}_k^i$ 的消息。

在第 p 次迭代中, 从因子节点 $f(\mathbf{z}_k^i | \mathbf{x}_k^i, \mathbf{x}_{k-1}^i)$ 传递到变节点的 $\mathbf{x}_k^i$ 消息 $m_{j \rightarrow i}^p(\mathbf{x}_k^i)$, $j \in \mathcal{N}_k^i$ 为

$$m_{j \rightarrow i}^p(\mathbf{x}_k^i) \propto \int f(\mathbf{x}_k^{i,j} | \mathbf{x}_k^i, \mathbf{x}_k^j) n_{j \rightarrow i}^{p-1}(\mathbf{x}_k^j) d\mathbf{x}_k^j \quad (36)$$

$$n_{j \rightarrow i}^{p-1}(\mathbf{x}_k^j) \propto m_{-k}(\mathbf{x}_k^j) \prod_{l \in \mathcal{N}_k^{j,i}} m_{l \rightarrow j}^{p-1}(\mathbf{x}_k^j) \quad (37)$$

式中: $n_{j \rightarrow i}^{p-1}(\mathbf{x}_k^j)$ 为在第 $p-1$ 次迭代中, 从变量节点 $\mathbf{x}_k^j$ 传递到因子节点 $f(\mathbf{z}_k^{i,j} | \mathbf{x}_k^i, \mathbf{x}_k^j)$ 的消息。

对于包含环路的因子图, 需要对 BP 进行多次迭代才能获得较好的近似解。本文仅考虑信息沿时间的前向传播, 不考虑回溯, 这样虽会造成一定的性能损失, 但是极大地降低了算法复杂度和计算量。在实际计算资源允许时, 可以采用扩维方法使用少量步数的回溯以进一步提高定位性能^[24]。

3.2 EKF-BP 算法

本节使用 EKF 实现 BP 算法, 并在大地坐标系直接更新各节点的状态, 提出 EKF-BP 算法。设式(35)中的消息 $m_{-k}(\mathbf{x}_k^i)$ 是高斯密度函数, 记作 $m_{-k}(\mathbf{x}_k^i) \propto \mathcal{N}(\mathbf{x}_k^i; \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^i, \mathbf{P}_{k|k-1}^i)$, 其中 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^i$ 和 $\mathbf{P}_{k|k-1}^i$ 通过 IMU 状态及误差传播模型递推得到。同样

地,式(37)的消息 $n_{j \rightarrow i}^{p-1}(\mathbf{x}_k^i) \propto \mathcal{N}(\mathbf{x}_k^i; \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^{j,p-1}, \mathbf{P}_{k|k-1}^{j,p-1})$, 其中 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^{j,p-1}$ 和 $\mathbf{P}_{k|k-1}^{j,p-1}$ 由无人机 j 进行一步预测,并接收其邻居 $l(l \in \mathcal{N}_k^{j \rightarrow i})$ 的消息进行 $p-1$ 次迭代得到。置信度 $b^p(\mathbf{x}_k^i) \propto \mathcal{N}(\mathbf{x}_k^i; \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^i, \mathbf{P}_{k|k}^i)$, 其中 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^i$ 和 $\mathbf{P}_{k|k}^i$ 为无人机 i 执行 p 次迭代后的估计结果。迭代从无人机 j 的一步预测开始,即 $n_{j \rightarrow i}^0(\mathbf{x}_k^i) = m_{\rightarrow k}(\mathbf{x}_k^i)$ 。

式(34)本质上是贝叶斯滤波器的更新步骤,在 EKF 的框架下实现此更新。类似式(23),将无人机 i 的状态 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^i$ 和邻居 j 发送的第 $p-1$ 次迭代后的状态 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^{j,p-1}(j \in \mathcal{N}_k^i)$ 进行堆叠,记作 $\hat{\mathbf{X}}_{k|k-1}^{i,s}$; 以对应的 MSE 矩阵构造块对角线矩阵,记作 $\mathbf{P}_{k|k-1}^{i,s}$ 。滤波增益计算式为

$$\mathbf{K}_k^i = \mathbf{P}_{k|k-1}^{i,s} (\mathbf{H}_k^i)^T (\mathbf{H}_k^{i,s} \mathbf{P}_{k|k-1}^{i,s} (\mathbf{H}_k^{i,s})^T + \mathbf{R}_k^i)^{-1} \quad (38)$$

设无人机之间不共享相对量测,无人机 i 的状态更新只依赖于自身产生的量测 $\mathbf{z}_{k|k}^{i,j}(j \in \mathcal{N}_k^i)$ 。因此,堆叠量测 $\mathbf{Z}_k^i$ 和堆叠量测预测 $\hat{\mathbf{Z}}_k^i$ 可如式(26)得到,对应的量测噪声矩阵 $\mathbf{R}_k^i$ 以 $\mathbf{R}_k^{i,j}(j \in \mathcal{N}_k^i)$ 为对角线构造,雅可比矩阵 $\mathbf{H}_k^{i,s}$ 由式(31)所示的 $\mathbf{H}_k^{i,j}$ 堆叠得到

$$\mathbf{H}_k^{i,s} = [\{(\mathbf{H}_k^{i,j})^T\}_{j \in \mathcal{N}_k^i}] \quad (39)$$

根据 EKF 公式更新堆叠状态估计 $\hat{\mathbf{X}}_{k|k-1}^{i,s}$ 及其对应的 MSE 矩阵 $\mathbf{P}_{k|k-1}^{i,s}$, 其中姿态更新通过旋转矩阵实现,即

$$\hat{\mathbf{X}}_k^{i,s} = \hat{\mathbf{X}}_{k|k-1}^{i,s} - \mathbf{K}_k^i (\hat{\mathbf{Z}}_k^i - \mathbf{Z}_k^i) \quad (40)$$

$$\mathbf{P}_k^{i,s} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k^i \mathbf{H}_k^{i,s}) \mathbf{P}_{k|k-1}^{i,s} (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k^i \mathbf{H}_k^{i,s})^T + \mathbf{K}_k^i \mathbf{R}_k^i (\mathbf{K}_k^i)^T \quad (41)$$

虽然式(40)本质上是使用 $\mathbf{z}_{k|k}^{i,j}$ 更新无人机 i 和 j 的状态估计,但是该更新在无人机 i 完成,因此仅保留更新后无人机 i 的状态估计 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^i$, 即 $\hat{\mathbf{X}}_k^{i,s}$ 的前 15 维。对应的 MSE 矩阵 $\mathbf{P}_{k|k}^i$ 为 $\mathbf{P}_k^{i,s}$ 的前 15×15 维。

4 基于 EKF-CI 的分布式 CL 算法

BP 算法可以在树状结构的因子图中提供精确的估计。然而,如果因子图中存在环路,BP 算法不一定保证收敛^[16, 26]。EKF-CI 算法由于其不考虑相关性而融合的特点,在增加鲁棒性的同时,会失去一定的估计精度。本节实现大地坐标系下基于 EKF-CI 的协同定位算法,以便于与 EKF-BP 算法进行比较。

当无人机 i 与邻居 j 通信,共享位置信息时,首先基于相对量测 $\mathbf{z}_{k|k}^{i,j}$ 和邻居 j 在 t_k 时刻的状态估计 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^j$ 获得对无人机 i 在 ECEF 笛卡尔坐标系的位置估计 $(\hat{\mathbf{r}}_{k|k-1}^i)^{\text{rel}}$, 使用 CI 算法融合 $\hat{\mathbf{r}}_{k|k-1}^i$ 和

$(\hat{\mathbf{r}}_{k|k-1}^j)^{\text{rel}}$, 并完成对无人机 i 的状态更新,即

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^i = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^i - \mathbf{K}_k (\hat{\mathbf{r}}_{k|k-1}^i - (\hat{\mathbf{r}}_{k|k-1}^j)^{\text{rel}}) \quad (42)$$

基于量测的估计 $(\hat{\mathbf{r}}_{k|k-1}^i)^{\text{rel}}$ 为

$$(\hat{\mathbf{r}}_{k|k-1}^i)^{\text{rel}} = \mathbf{z}_{k|k-1}^{i,j} - \hat{\mathbf{r}}_{k|k-1}^j \quad (43)$$

对应的 MSE 为

$$\mathbf{P}_{k|k-1}^{\text{rel}} = \mathbf{H}_k^j \mathbf{P}_{k|k-1}^j (\mathbf{H}_k^j)^T + \mathbf{R}_k \quad (44)$$

滤波增益 $\mathbf{K}_k$ 的计算式为

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^i (\mathbf{H}_k^i)^T (\mathbf{H}_k^i \mathbf{P}_k^i (\mathbf{H}_k^i)^T + \mathbf{P}_k^j)^{-1} \quad (45)$$

协方差矩阵 $\mathbf{P}_k^i, \mathbf{P}_k^j$ 为

$$\mathbf{P}_k^i = \frac{\mathbf{P}_{k|k-1}^i}{W_k^i}, \mathbf{P}_k^j = \frac{\mathbf{P}_{k|k-1}^{\text{rel}}}{1 - W_k^i} \quad (46)$$

参数 $W_k^i \in [0, 1]$ 是如下优化问题的解

$$\min_{W_k^i} [\text{tr}(\mathbf{P}_{k|k}^i)] \quad (47)$$

式中: $\text{tr}(\mathbf{P})$ 为矩阵 $\mathbf{P}$ 的迹; $\mathbf{P}_{k|k}^i$ 为融合状态估计的对应 MSE, 计算式为

$$\mathbf{P}_{k|k}^i = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k^i) \mathbf{P}_k^i (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k^i)^T + \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k (\mathbf{K}_k)^T \quad (48)$$

5 仿真实验与结果分析

3 架可互相通信的无人机在高度 500 m 处编队飞行,各无人机在大地坐标系的初始位置分别为

$$\mathbf{r}_0^1 = [34.250 \ 1^\circ \ 108.659 \ 4^\circ \ 500 \text{ m}]^T$$

$$\mathbf{r}_0^2 = [34.260 \ 1^\circ \ 108.659 \ 4^\circ \ 500 \text{ m}]^T$$

$$\mathbf{r}_0^3 = [34.270 \ 1^\circ \ 108.659 \ 4^\circ \ 500 \text{ m}]^T$$

3 架无人机在东北天坐标系下的初始速度均为

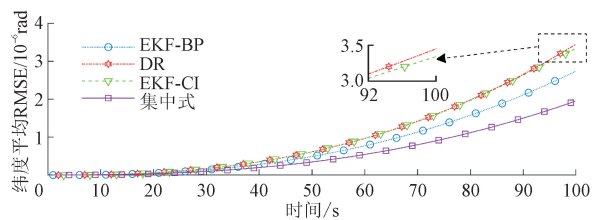
$$\mathbf{v}_0^i = [70 \text{ m/s} \ 70 \text{ m/s} \ 70 \text{ m/s}]^T, i = 1, 2, 3$$

初始姿态角、加速度计及陀螺仪偏置均为 $\mathbf{0}$ 。根据各无人机的初始状态生成真实轨迹,在真实轨迹的基础上使用 IMU 模型生成 IMU 量测,基于相对量测模型生成相对位置量测。仿真中涉及的噪声均为 $\mathbf{0}$ 均值的高斯白噪声,其中,相对量测噪声的协方差设置为 $10^{-2} \mathbf{I}_3$, IMU 量测噪声协方差分别设置为

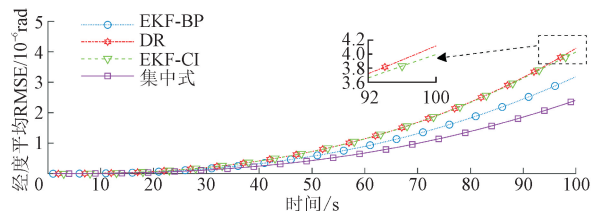
$$\mathbf{n}_{\text{g}}^i = \mathbf{n}_{\text{a}}^i = 10^{-8} \mathbf{I}_3, \mathbf{n}_{\text{wa}}^i = 10^{-12} \mathbf{I}_3, i = 1, 2, 3$$

$$\mathbf{n}_{\text{wg}}^1 = 10^{-14} \mathbf{I}_3, \mathbf{n}_{\text{wg}}^2 = \mathbf{n}_{\text{wg}}^3 = 10^{-13} \mathbf{I}_3$$

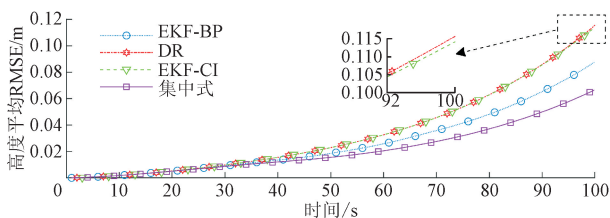
仿真持续时长为 100 s, IMU 量测的数据率为 100 Hz, 相对量测的数据率为 1 Hz。每次获得相对量测值时分别采用集中式、EKF-BP 和 EKF-CI 对 IMU 演化的状态估计执行更新,其中,仿真对 BP 算法进行 2 次迭代。仿真共执行了 500 次蒙特卡罗,使用各节点的均方根误差(RMSE)的平均值来比较估计精度。图 3~图 5 给出各算法的绝对位置、绝对速度和姿态的节点平均 RMSE 随时间变化的曲线。图 3 显示,CL 算法的绝对定位精度在各个位置维度都比 DR 高,精度最低的 EKF-CI 算法也能在 DR 的基础上提高定位精度。



(a) 纬度平均 RMSE



(b) 经度平均 RMSE



(c) 高度平均 RMSE

图 3 绝对位置的平均 RMSE

Fig. 3 Absolute position average RMSE

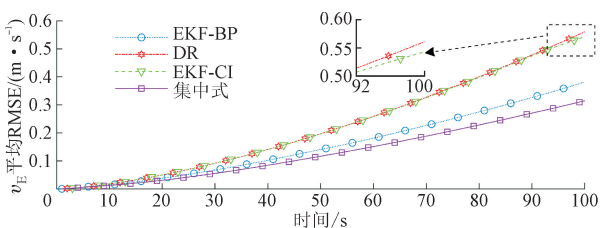
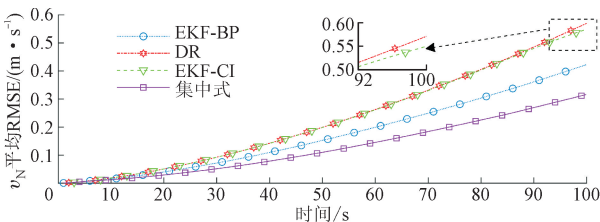
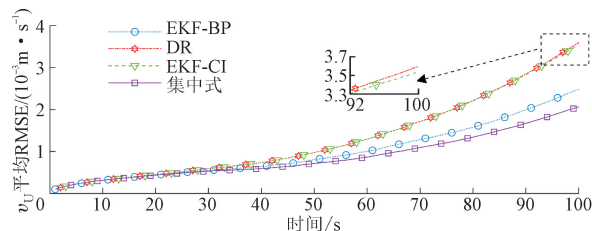
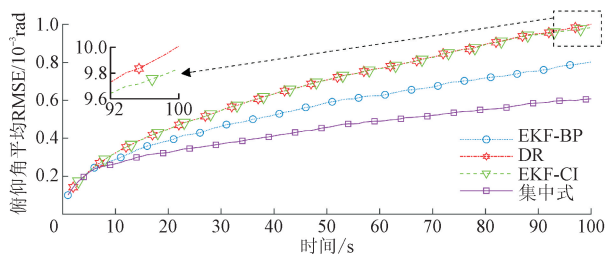
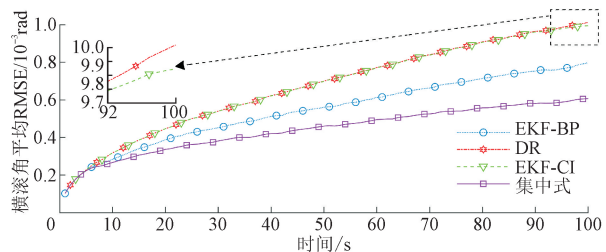
(a) v_E 平均 RMSE(b) v_N 平均 RMSE(c) v_U 平均 RMSE

图 4 绝对速度的平均 RMSE

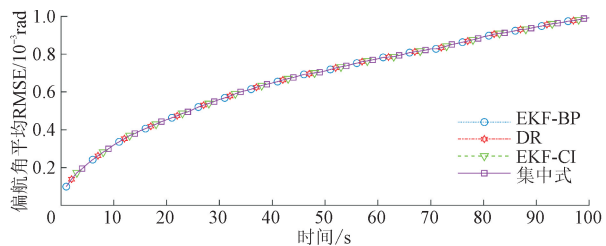
Fig. 4 Absolute velocity average RMSE



(a) 俯仰角平均 RMSE



(b) 横滚角平均 RMSE



(c) 偏航角平均 RMSE

图 5 姿态的平均 RMSE

Fig. 5 Attitude average RMSE

表 1 给出各 CL 方法在 100 s 时获得的位置估计的节点平均 RMSE,并以 DR 作为基准计算各算法对定位精度的提升量。仿真结果印证了 CL 的优越性,能够通过协同来抑制 IMU 的累计误差,其中集中式算法由于对量测和节点状态相关性的充分利用,提供了所有 CL 算法的精度上限。本文所提出的 EKF-BP 算法作为一种分布式算法,其绝对定位精度的提升量能达到集中式方法的约 65%,是分布式 EKF-CI 提升量的 10 倍左右,并且能够很好地利用相对量测抑制 DR 的误差累积,改善整个网络的定位精度。此外,从图 4、5 可以看出,尽管量测中只包含相对位置信息,但是 EKF-BP 的速度和姿态精度明显高于 DR 的结果,说明位置精度的提高同样有助于改善其他维度的精度。

为验证网络拓扑对各协同定位算法性能的影响,在不同拓扑链接和不同规模的网络中分别实现上述算法,表 2 给出 100 s 时各 CL 算法相对于 DR 结果的定位精度提升量。在全连接拓扑和大型网络规模的无人机集群中,各无人机能获得的量测信息量相较于链状拓扑和小型网络极大增加。

表 1 各算法 100 s 时的定位精度及相对于 DR 的提升率

Table 1 The positioning accuracy and improvement rate relative to DR of each algorithm at 100 s

算法	平均 RMSE			平均精度提升率/%		
	纬度/ 10^{-6} rad	经度/ 10^{-6} rad	高度/m	纬度	经度	高度
DR	3.453 2	4.103 0	0.116 7			
EKF-BP	2.607 1	2.849 9	0.082 4	24.50	30.54	29.39
EKF-CI	3.315 6	3.966 2	0.115 0	3.98	3.33	1.46
集中式	1.910 5	2.362 7	0.067 5	44.67	42.42	42.16

表 2 不同网络拓扑中的 CL 算法性能

Table 2 Performance of CL algorithms in different topologies

节点数	平均精度提升量/%		
	EKF-BP	EKF-CI	集中式
2	12.816 8	1.146 4	28.510 0
3	26.310 3	1.988 6	42.060 7
	27.446 0	2.308 8	42.992 5
7	48.638 8	2.064 2	61.652 0
	49.057 3	7.129 7	62.295 8
15	53.433 2	2.512 9	72.954 9
	64.375 7	20.807 0	74.978 2

相较于链状拓扑,在采用全连接拓扑的无人机集群中,EKF-BP 算法能够获得更好的定位效果,并且随着无人机节点数量的增加,其定位性能进一步得到提升,与集中式算法结果的差距逐渐缩小,主要原因如下:①非线性的量测模型需通过 Taylor 展开来完成线性化,用局部导数代替函数整体均值,导致估计精度下降;②多无人机分布式协同定位的因子图中存在环路,因此 BP 算法只能提供近似解,造成一定程度的精度损失;③在全连接的网络拓扑中,可用于协同定位的节点量测信息较链状拓扑极大增加,随着网络规模的增大,这一差距愈发明显。EKF-BP 算法的定位性能随之得到明显改善,更接近集中式算法的性能。

为验证所提分布式定位方法的计算效率,表 3 给出了各 CL 算法在不同规模的全连接网络中进行 100 次蒙特卡洛的平均计算时间。其中 EKF-BP 为进行一次迭代的结果,并且此时定位精度较 DR 仍有明显提高,甚至接近多次迭代的精度,说明所提 EKF-BP 算法的收敛速度很快,能够通过有限的迭代达到较高的定位精度。

表 3 CL 算法的平均计算时间

Table 3 Average computation time of the CL algorithm

节点数	计算时间/s		
	EKF-BP 单节点	EKF-CI 单节点	集中式 融合中心
2	11.073 0	9.792 8	21.148 0
3	9.969 9	9.266 3	28.266 4
7	8.964 3	9.754 5	66.587 8
15	8.704 9	7.149 3	169.587 0

从表 3 可以看出:随着节点增多,集中式优化计算时间增长较分布式更加明显。由于分布式算法在各无人机节点中并行进行,其计算效率明显优于集中式,随着网络规模的增大,分布式算法的计算优势更为显著;虽然 EKF-CI 算法通常具有最低的计算成本,但是其相对于 DR 的精度提高十分有限。综合分析可得如下结论。

(1)在 IMU 自主定位导航的基础上,通过 CL 算法利用无人机之间的相对位置信息,无人机网络的导航定位精度得到了提高。由于位置和姿态之间的相关性,无人机的姿态估计精度同样有所提高。

(2)随着拓扑链接数和网络节点数的增加,CL 算法对 IMU 累积误差的抑制作用愈发明显。在大规模的无人机网络中,分布式协同定位算法具有明显的计算效率优势,与 EKF-CI 算法相比,所提的 EKF-BP 算法拥有更高的定位性能。

(3)所提的分布式 EKF-BP 算法能够在较少的迭代次数下获得较高的定位精度,较好解决了 IMU 导航在缺少绝对位置信息时,精度随时间迅速降低的问题,在大规模全连接网络中具有很好的性能。

6 结 论

本文从提高 IMU 定位导航精度的角度出发,利用网络节点间相对位置信息,将现有 BP 算法的

应用场景拓展到大地坐标系,研究了一种卫星拒止时紧耦合的分布式无人机协同定位导航算法,与EKF-CI算法相比,本文提出的EKF-BP算法具有更精确的定位结果,各维度的绝对位置估计精度较DR分别提高了24.5%、30.54%和29.39%。虽然本文的研究是基于相对位置量测来实现的,但其同样能够处理实际中常用的极坐标量测模型,只需通过量测转换方法对极坐标量测进行预处理,将其转换为本文中的量测模型即可。

参考文献:

- [1] 李清华, 高影, 王振恒, 等. 一种动态分组的多节点协同定位编队构型优化方法[J]. 中国惯性技术学报, 2022, 30(6): 746-751.
- LI Qinghua, GAO Ying, WANG Zhenhuan, et al. A dynamic grouping formation configuration optimization method for multi-node cooperative localization[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2022, 30(6): 746-751.
- [2] HAN Ke, ZHANG Chongyu, XING Huashuai, et al. An area optimization based cooperative localization algorithm with node selection[J]. China Communications, 2021, 18(12): 178-195.
- [3] CHOI J, MYUNG H. BRM localization: UAV localization in GNSS-denied environments based on matching of numerical map and UAV images[C]//2020 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2020: 4537-4544.
- [4] PAULL L, SAEEDI S, SETO M, et al. AUV navigation and localization: a review[J]. IEEE Journal of Oceanic Engineering, 2014, 39(1): 131-149.
- [5] PIRES A G, REZECK P A F, CHAVES R A, et al. Cooperative localization and mapping with robotic swarms[J]. Journal of Intelligent & Robotic Systems, 2021, 102(2): 47.
- [6] YAN Zheping, LUAN Zhengkun, LIU Jianbo, et al. A cooperative localization method for multiple unmanned underwater vehicles based on improved factor graph[C]//2023 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2023: 894-899.
- [7] WAINWRIGHT M J, JAAKKOLA T S, WILLISKY A S. Tree-based reparameterization framework for analysis of sum-product and related algorithms[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2003, 49(5): 1120-1146.
- [8] SU Qinliang, WU Y C. Convergence analysis of the variance in gaussian belief propagation[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2014, 62(19): 5119-5131.
- [9] MEYER F, HLINKA O, HLAWATSCH F. Sigma point belief propagation[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2014, 21(2): 145-149.
- [10] WIELANDNER L, LEITINGER E, MEYER F, et al. Message passing-based 9-D cooperative localization and navigation with embedded particle flow[J]. IEEE Transactions on Signal and Information Processing Over Networks, 2023, 9: 95-109.
- [11] GARCÍA-FERNÁNDEZ Á F, SVENSSON L, SÄRKKÄ S. Cooperative localization using posterior linearization belief propagation[J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2018, 67(1): 832-836.
- [12] GARCÍA-FERNÁNDEZ Á F, SVENSSON L, MORELANDE M R, et al. Posterior linearization filter: principles and implementation using sigma points[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2015, 63(20): 5561-5573.
- [13] ÇAKMAK B, URUP D N, MEYER F, et al. Cooperative localization for mobile networks: a distributed belief propagation-mean field message passing algorithm[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2016, 23(6): 828-832.
- [14] WYMEERSCH H, LIEN J, WIN M Z. Cooperative localization in wireless networks[J]. Proceedings of the IEEE, 2009, 97(2): 427-450.
- [15] KIM H, CHOI S W, KIM S. Connectivity information-aided belief propagation for cooperative localization[J]. IEEE Wireless Communications Letters, 2018, 7(6): 1010-1013.
- [16] CORNELISSEN K, MANTHEY B. Belief propagation for the maximum-weight independent set and minimum spanning tree problems[J]. Theoretical Computer Science, 2018, 738: 53-64.
- [17] FANG Susu, LI Hao, YANG Ming. Adaptive cubature split covariance intersection filter for multi-vehicle cooperative localization[J]. IEEE Robotics and Automation Letters, 2022, 7(2): 1158-1165.
- [18] SUN Shuli. Multi-sensor optimal information fusion Kalman filters with applications[J]. Aerospace Science and Technology, 2004, 8(1): 57-62.
- [19] CHANG T K, CHEN K, MEHTA A. Resilient and consistent multirobot cooperative localization with covariance intersection[J]. IEEE Transactions on Robotics, 2022, 38(1): 197-208.
- [20] LIANG Mingchao, MEYER F. Neural enhanced belief

propagation for cooperative localization [C]//2021 IEEE Statistical Signal Processing Workshop. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2021: 326-330.

[21] 杨秀建, 谢永焘. 基于启发式调谐 E_{H^∞} 的多机器人协同定位 [J]. 中国惯性技术学报, 2023, 31(1): 24-32.

YANG Xiujian, XIE Yongtao. Multi-robot cooperative localization based on heuristically tuned extended H^∞ filter [J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2023, 31(1): 24-32.

[22] GOEL S, KEALYA, GIKAS V, et al. Cooperative localization of unmanned aerial vehicles using GNSS, MEMS inertial, and UWB sensors [J]. Journal of Surveying Engineering, 2017, 143(4): 04017007.

[23] NOURELDIN A, KARAMAT T B, GEORGY J. Fundamentals of inertial navigation, satellite-based positioning and their integration [M]. Berlin, Germany: Heidelberg, 2013.

[24] ZHANG Bolun, GAO Guangen, GAO Yongxin. Cooperative localization based on augmented state belief propagation for mobile agent networks [J]. Electronics, 2022, 11(13): 1959.

[25] MA Xiaoshuang, LIU Xixiang, LI Chenlong, et al. Multi-source information fusion based on factor graph in autonomous underwater vehicles navigation systems [J]. Assembly Automation, 2021, 41(5): 536-545.

[26] SU Qinliang, WU Y C. On convergence conditions of Gaussian belief propagation [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2015, 63(5): 1144-1155.

(编辑 赵炜)